# Tensor Renormalization Group Approach to Two-dimensoinal Classical Lattice Models

Michael Levin and Cody P. Nave
PRL 99, 120601(2007)

2014/10/10
酒井　慧

- Introduction
- The TRG method
- A Simple example
- Summary

# Introduction

- Tensor Renormalization Group(TRG) methodは従来のモンテカルロmethodに代わり提案された方法

- TRG methodの利点

  1,Sign problem がない

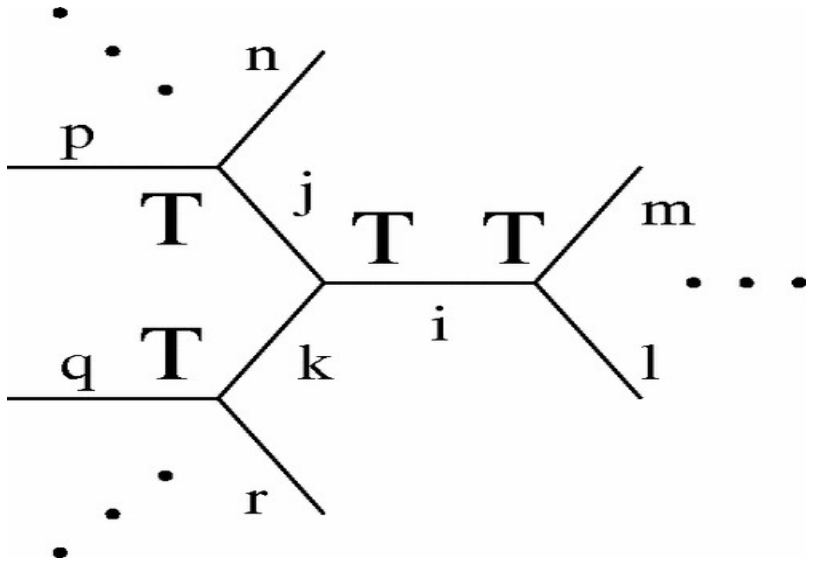
  2,複素Lagrangianの系に対しても使える

# The TRG method

- 局所相互作用の系の分配関数

$$Z = \sum_{ijk\ldots} e^{-S(i,j,k,\ldots)} = \sum_{ijk\ldots} T_{ijk} T_{ilm} T_{jnp} T_{kqr} \ldots$$

→Tensor network model
として自然に書ける

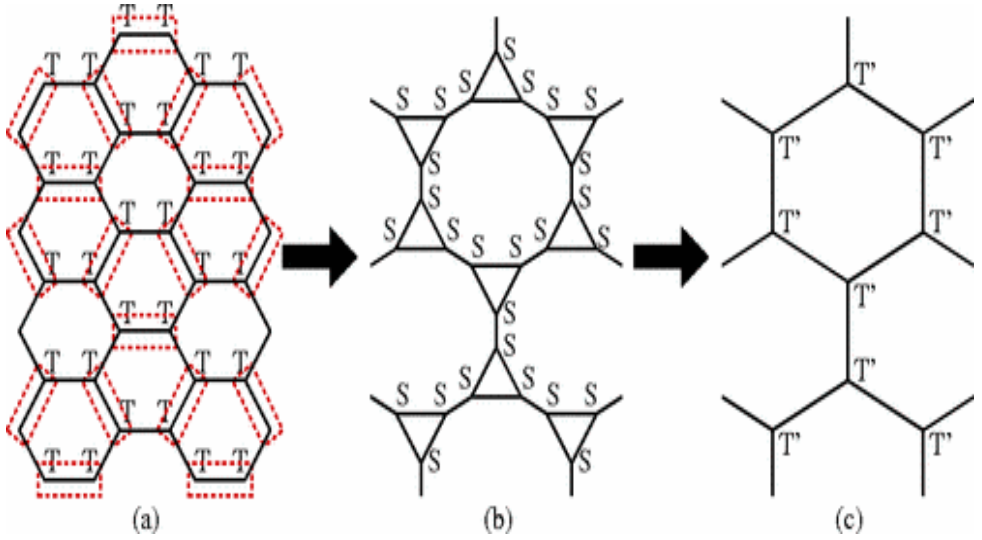


# The TRG method

- TRG methodは2つの過程で行われる

  1、linkをつなぎかえる

  2、縮約をとる

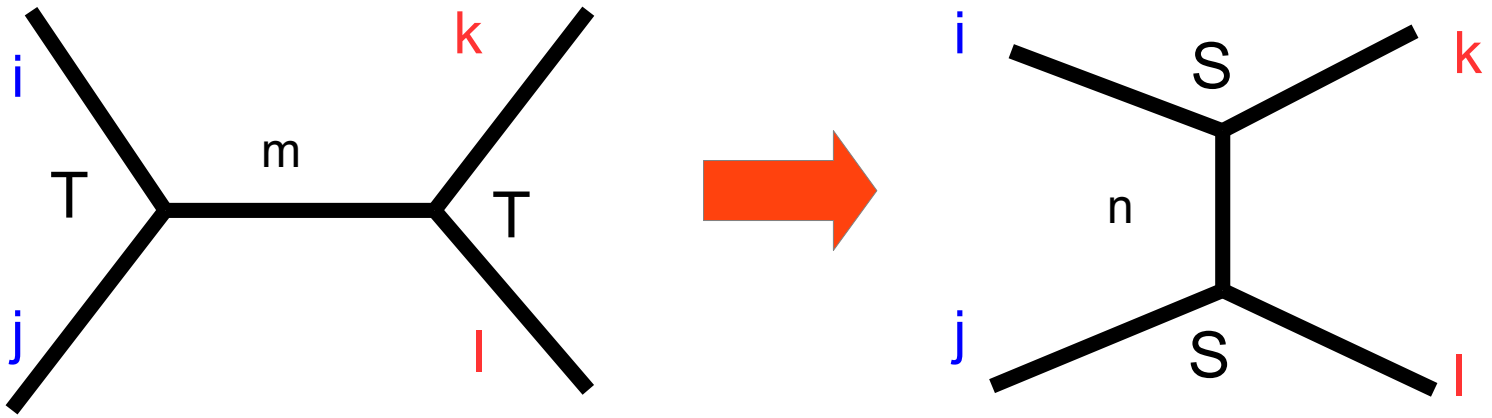



$$\sum_n S_{ikn} S_{jln} \approx \sum_m T_{ijm} T_{klm}$$

$$T'_{ijk} = \sum_{pqr} S_{kpq} S_{jqr} S_{irp}$$

# The TRG method

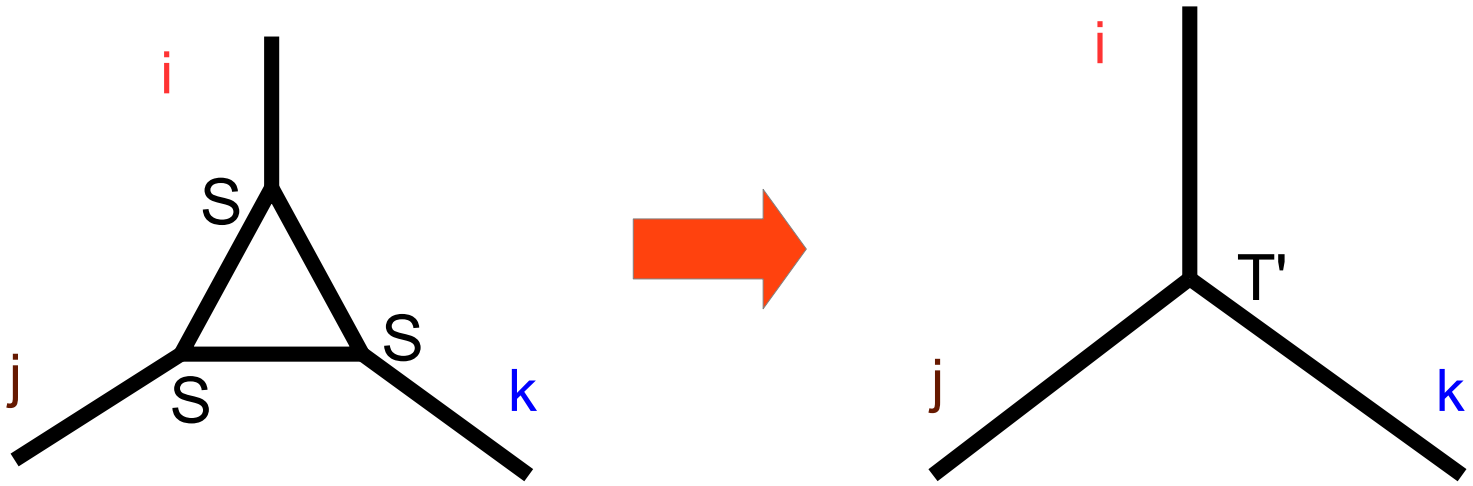
1、linkをつなぎかえる




$$\sum_n S_{ikn} S_{jln} \approx \sum_m T_{ijm} T_{klm}$$

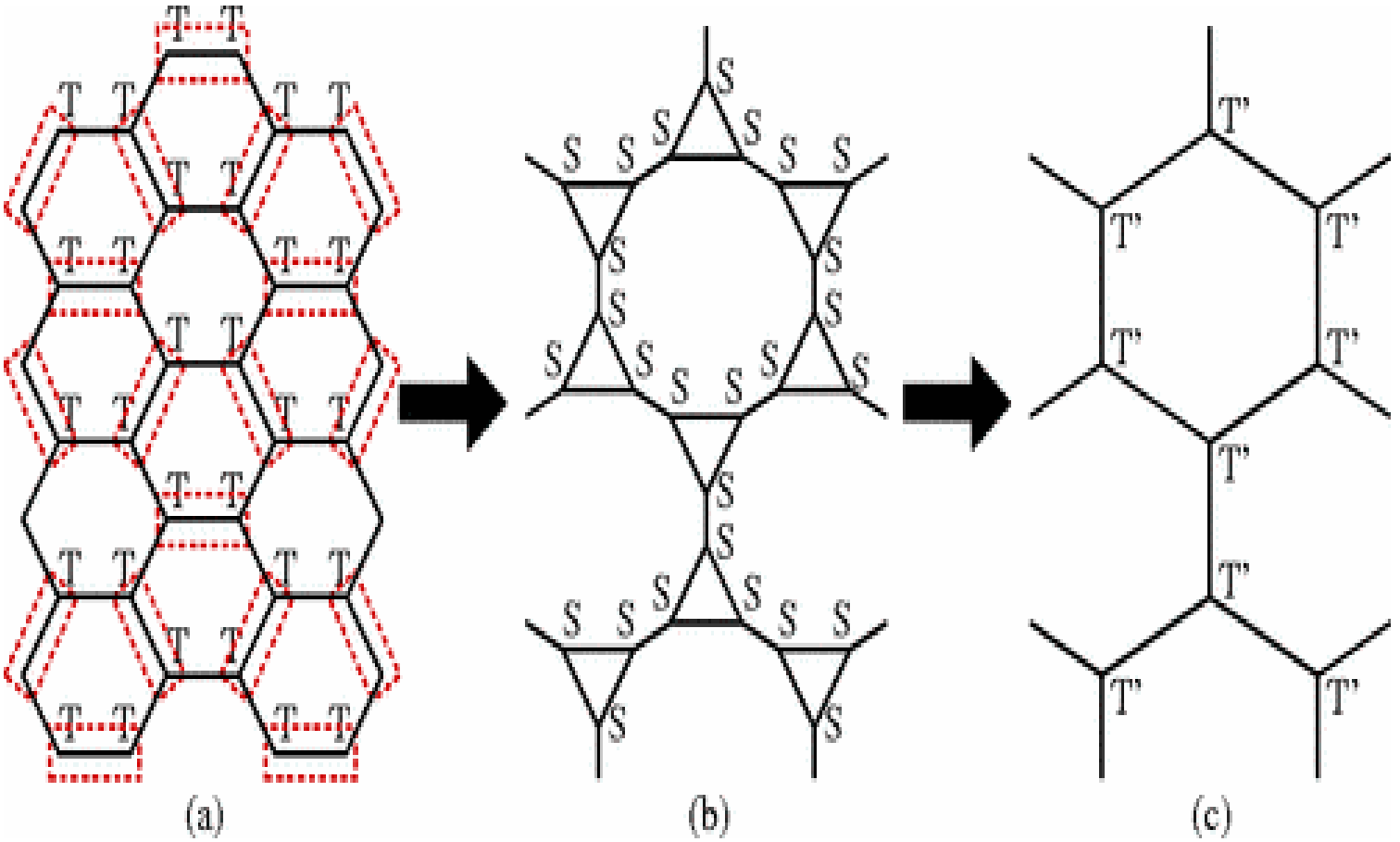
# The TRG method

２、縮約をとる




$$T'_{ijk} = \sum_{pqr} S_{kpq} S_{jqr} S_{irp}$$

# TRG method



# The TRG method

- どのようにしてテンソルSを見つけるか？
- Tの積を行列Mだと考え
  $\sum_m T_{ijm}T_{klm} = M_{ij,kl} \quad (M: D^2 \times D^2 matrix)$
- 以下を最小とするようにする
  $|M - S^T S|^2$
- そのために特異値分解をする
  $M_{ij,kl} = \sum_n S_n U_{li,n} V^*_{jk,n}$
- U,Vはユニタリー行列

# The TRG method

- 大きいDまでの特異値に対応する部分だけで

$$S^{A}{}_{li,n} = \sqrt{S_n}\widetilde{U}_{li,n}$$

$$S^{B}{}_{jk,n} = \sqrt{S_n}\widetilde{V^*}_{li,n}$$

- とすると

$$\sum_n S^{B}{}_{jk,n} S^{A}{}_{li,n} \approx \sum_m T_{ijm} T_{klm}$$

- この工程と縮約をとる

$$T'_{ijk} = \sum_{pqr} S_{kpq} S_{jqr} S_{irp}$$

- 粗視化ができる

# A Simple example

- 三角格子上のIsing model に対してTRG methodを用いる
- 分配関数はdomain wall構造の和として書ける

  D=2のtensor network
- i=1:no domain wall　　i=2:domain wall

  とするとtensor の要素は

$$T^{111} = 1, T^{221} = T^{212} = T^{122} = \alpha$$

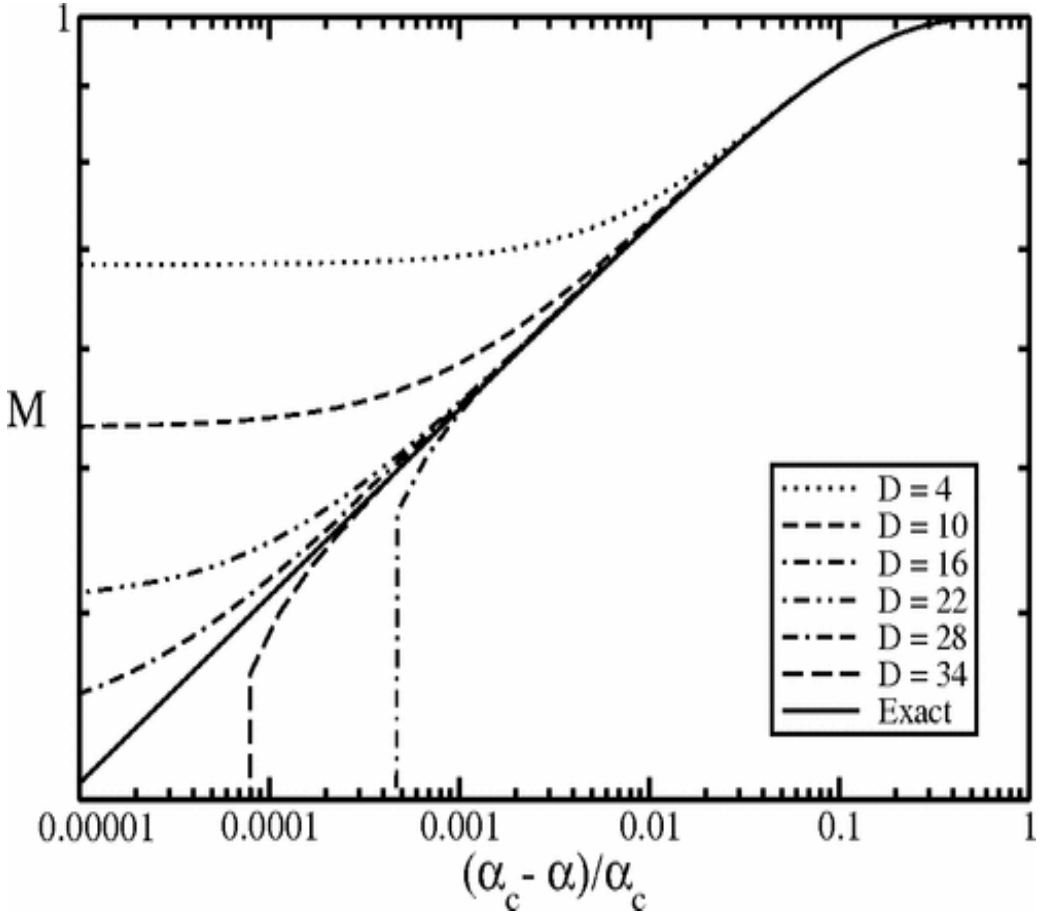
$$\alpha = e^{-2\beta J}$$

# A Simple example

- 自由エネルギー

$$F = -(N\beta)^{-1}\log(Z)$$

- 微分して1スピンあたりの磁化Mを出す



# Summary

- TRG methodによる2次元古典格子modelの粗視化手続を導入した
- 三角格子Ising modelを用いてTRG methodの有効性を確認した
- 現在は様々な系に対してTRG methodが使われている