The Pricing of Options and Corporate Liabilities

Fischer Black, Myron Scholes

Ref:J of Political Economy, 81, 637-654(1973)

山田 真徳

Tsukuba

Introduction

Novel prize in Economic Sciences(1997)

ブラック・ショールズモデル考案で
ノーベル経済学賞をとった論文

現在でも唯一、デリバティブの時価計算
に成功しているモデル(亜種は存在)

- 大数の法則が使えないときのモデル
- 金融工学でのモンテカルロ計算はこれ
- 実は熱拡散方程式と等価

モデルの考案者

Fischer Black

Myron Scholes

数学的証明

Robert Cox Merton

この論文の主張

デリバティブの時価は以下の公理から一意に決定することができる。

- 金利は一定(時間に依存しない)
- 株式に配当はない(現実は配当がある)
- 取引コストはかからない(現実は手数料がかかる)
- 任意の額で無リスクな資金調達が可能
- 将来の株価は誰も予想できない(インサーダーはなし)
- “Arbitrage”が存在しない

Arbitrage：元手0から無リスクで儲けるチャンス

Arbitrageがある例(本当は存在してはいけない)

取引所A	取引所B
1＄⇔100円	1＄⇔120円

100円→1＄→120円

無リスクで20円儲けてる！

同じ条件で異なる価値を生み出してはいけない!

流れ

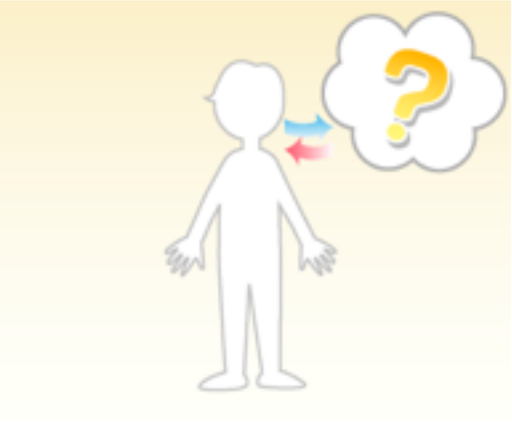
- 時価計算が必要な対象(デリバティブ)の説明
- 2項モデル(toy modelで練習)
- Black Scholes modelの説明
- 熱拡散方程式の関係(Feynman-kacの公式)
- デルタヘッジ(株式を保有した時リスクヘッジできる小ネタ)

流れ

- 時価計算が必要な対象(デリバティブ)の説明
- 2項モデル(toy modelで練習)
- Black Scholes modelの説明
- 熱拡散方程式の関係(Feynman-kacの公式)
- デルタヘッジ(株式を保有した時リスクヘッジできる小ネタ)

時価って計算するものなの？？

ニーズ:　[金融市場のリスクとリターンをコントロールしたい]

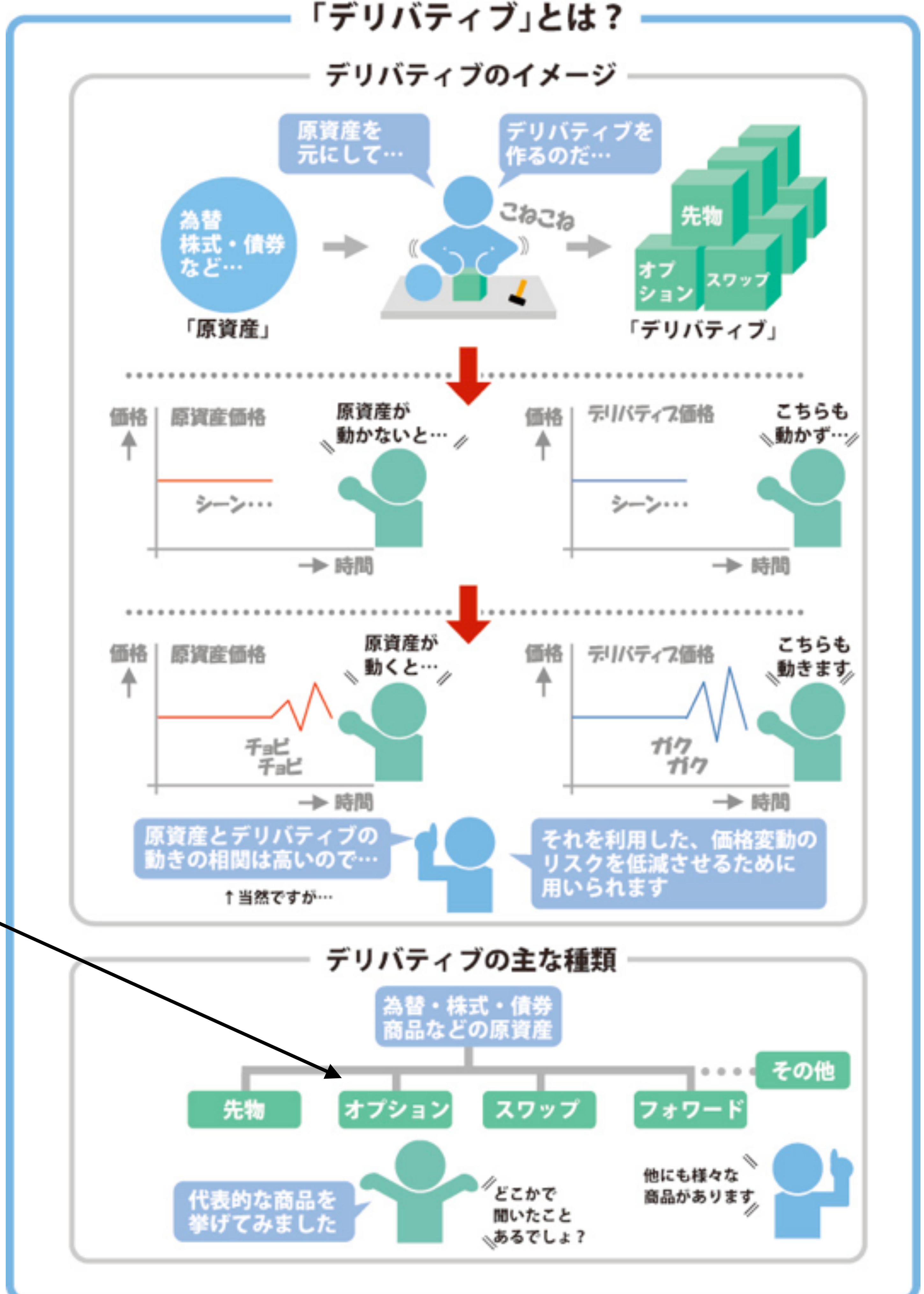


デリバティブ商品の誕生！

(株式、債券、金利、為替を組み合わせたもの)

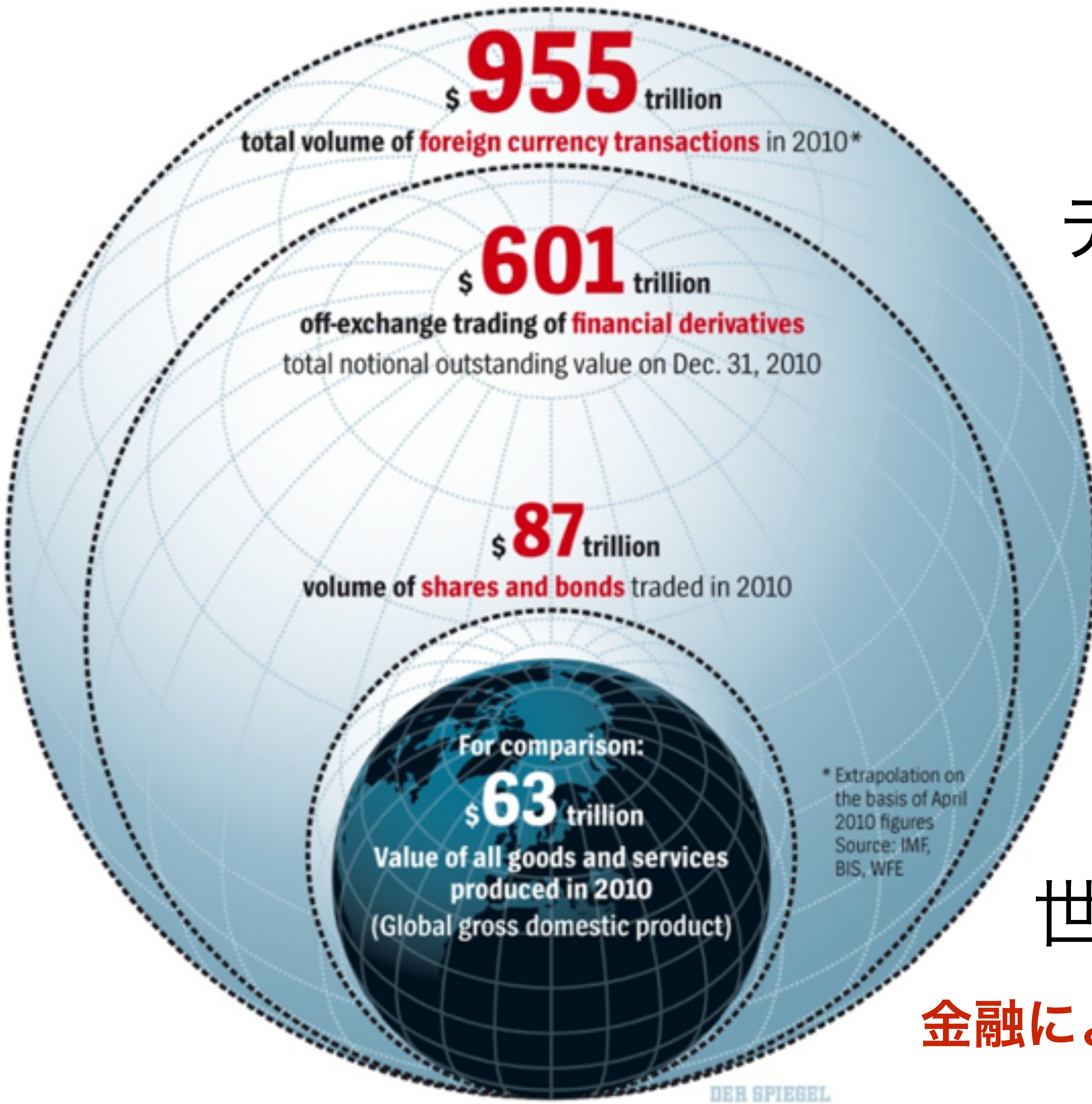
組み合わせでできてるので、ぱっとみでは適正価格がわからない!

今回はこれ



「デリバティブ」とは？
デリバティブのイメージ
原資産を元にして…
デリバティブを作るのだ…
為替 株式・債券 など…
こねこね
先物
オプション
スワップ
「原資産」
「デリバティブ」
価格
原資産価格
原資産が動かないと…
シーン…
時間
デリバティブ価格
こちらも動かず…
原資産が動くと…
チョビチョビ
こちらも動きます
ガクガク
原資産とデリバティブの動きの相関は高いので…
↑当然ですが…
それを利用した、価格変動のリスクを低減させるために用いられます
デリバティブの主な種類
為替・株式・債券 商品などの原資産
その他
先物
オプション
スワップ
フォワード
代表的な商品を挙げてみました
どこかで聞いたことあるでしょ？
他にも様々な商品があります

様々な市場規模(2010)



デリバティブ：6.123京円

世界のGDP：6420兆円

世界の物質商品の約10倍!

金融による“信用創造”が生み出した化け物

流れ

- ~~時価計算が必要な対象(デリバティブ)の説明~~
- 2項モデル(toy modelで練習)
- Black Scholes modelの説明
- 熱拡散方程式との関係(Feynman-kacの公式)
- デルタヘッジ(株式を保有した時リスクヘッジできる小ネタ)

2項モデル(時間の離散モデル)

$$
\begin{tikzcd}
 & S_u(t_1) \\
S(t_0) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & S_d(t_1)
\end{tikzcd}
$$

時間1ステップで株価はup or downのどっちか

ポイントは2つ

1，リスク商品、無リスク商品の存在

リスク商品：将来の価値が不明

S: 株価

$$S(t_0) \to S_u(t_1), \quad S(t_0) \to S_d(t_1)$$

例：株、為替

無リスク商品：将来の価値がわかる

例：債券(銀行からお金を借りる)

$$B_t = B_0 e^{\gamma t} \quad \Leftarrow \quad \frac{dB_t}{dt} = \gamma$$

B:債券
γ: 金利

ポイントは2つ

2, デリバティブは、リスク商品と無リスク商品のPortfolioとみなすことができる

$$P(t_0) = aS(t_0) + B_0$$

Portfolio　　a個のリスク商品　　無リスク商品

Arbitrageがない(元手0から無リスクで利益を生み出すチャンスを潰す)

↓

同じ条件で異なる価値を生み出してはいけない!

↓

デリバティブの時価は、Portfolioと同じ価値にすればいい

時価を計算する

$t = 0$

$$P(t_0) = aS(t_0) + B_0$$

$t = 1$

$$P_u(t_1) = aS_u(t_1) + e^{\gamma t_1} B_0$$

$$P_d(t_1) = aS_d(t_1) + e^{\gamma t_1} B_0$$

$P(t_0), a, B_0$ について解く

時価

$$P(t_0) = e^{-\gamma t_1}(qP_u(t_1) + (1-q)P_d(t_1)) \quad q \equiv \frac{S(t_0)e^{\gamma t_1} - S_d(t_1)}{S_u(t_1) - S_d(t_1)}$$

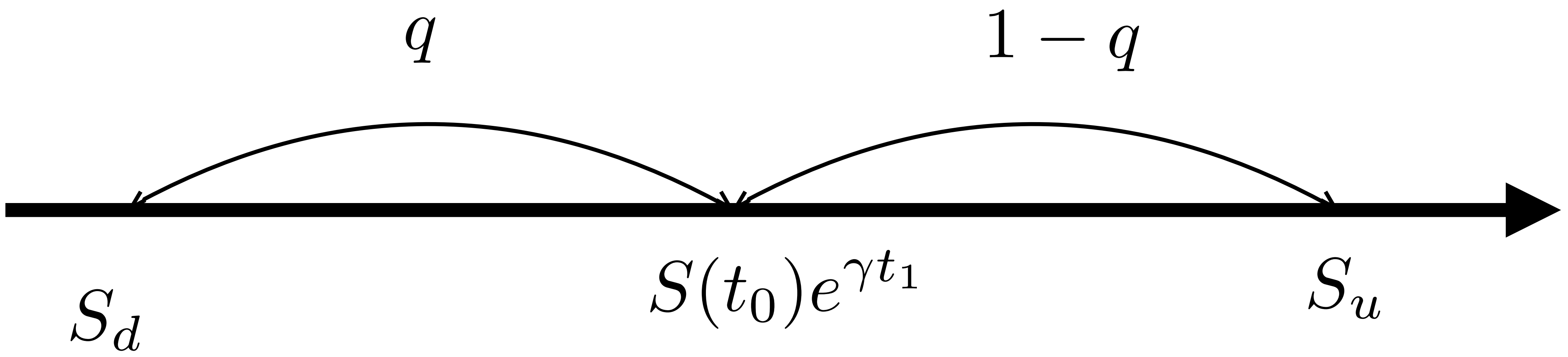
時価は、qという重みをつけた P_u P_d の期待値になっている。

ちなみに

$$P(t_0) = e^{-\gamma t_1}(qP_u(t_1) + (1-q)P_d(t_1)) \quad q \equiv \frac{S(t_0)e^{\gamma t_1} - S_d(t_1)}{S_u(t_1) - S_d(t_1)}$$

qという重みをつけた$P_u\,P_d$の期待値になっている。

$S(t_0)e^{\gamma t_1}$ からの S_u S_d までの幅を確率だとみなす



Arbitrageから $0 \le q \le 1$ も示すことができる

コメント

- 株価が上下する確率を利用していない（株式市場において株価上昇確率に大数の法則が使えないため）

  独立な思考を繰り返すことが前提だが、株は満期まで１回の試行しかできない。

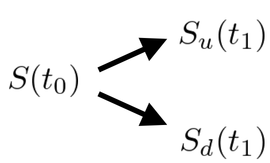
- ｑはリスク中立確率と呼ばれる、株価の上下の幅によって決まる特殊な確率である。(実際の株価が上下する確率ではない)

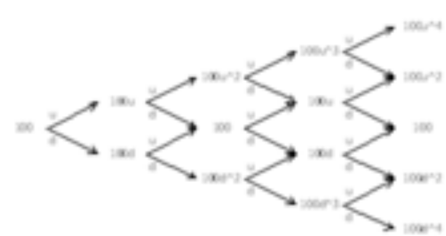
流れ

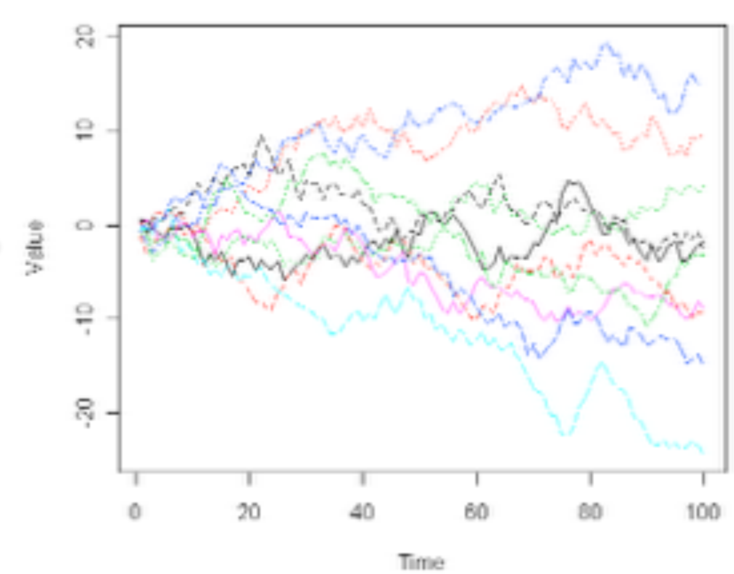
- ~~時価計算が必要な対象(デリバティブ)の説明~~
- ~~2項モデル(toy modelで練習)~~
- Black Scholes modelの説明
- 熱拡散方程式の関係(Feynman-kacの公式)
- デルタヘッジ(株式を保有した時リスクヘッジできる小ネタ)

ブラック・ショールズモデル

BS model







2項model

2項model

BS model

nステップの２項分布から出発する

up

$$S_u = exp(\sigma\sqrt{dt})$$

down

$$S_d = exp(-\sigma\sqrt{dt})$$

S: 株価

σ:ボラティィリティィ

リスク中立確率

$$q \equiv \frac{e^{\gamma dt} - e^{-\sigma\sqrt{dt}}}{e^{\sigma\sqrt{dt}} - e^{-\sigma\sqrt{dt}}}$$

tの間にn回上昇、n-x回下落した場合の株価

$$S(t) = S(t_0)\{exp(\sigma\sqrt{dt})\}^x\{exp(-\sigma\sqrt{dt})\}^{n-x}$$

$$dt = \frac{t}{n}$$

酔歩問題と同じ

$$\langle S_t \rangle = S_0 \int_{-\infty}^{\infty} dx\, exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\sqrt{t}x)\underline{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(-\frac{x^2}{2})}$$

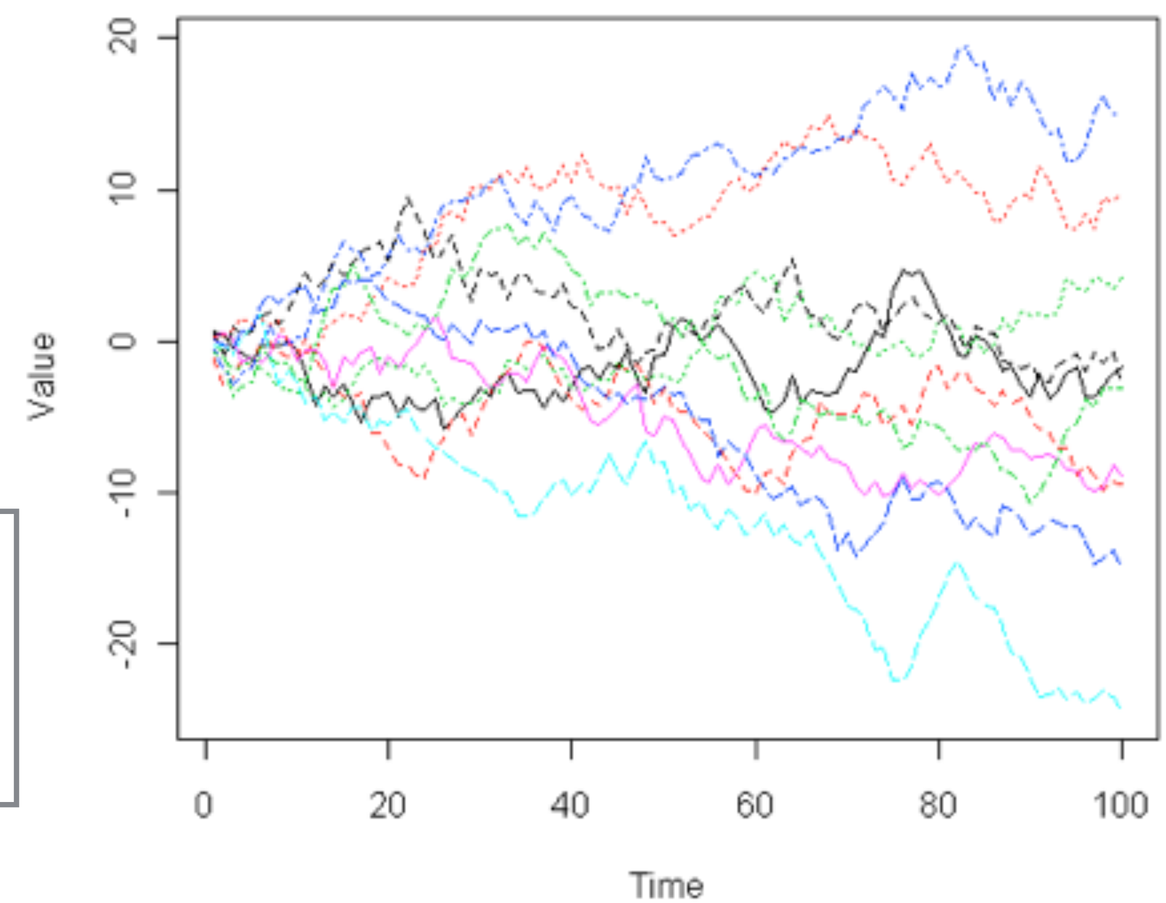
天下りだが、２項分布は試行回数を増やすと正規分布になることを用い導いた

伊藤の公式から導ける

BSモデル

$$dS_t = S_t(\sigma dW_t + \mu dt)$$

株価はドリフト付きブラウン運動



W:ブラウン運動(こいつが確率過程)
μ:ドリフト

今株価の期待値がわかったので、Portfolioの価値が計算でき、デリバティブの時価計算ができる！

デリバティブのありがたみとは？

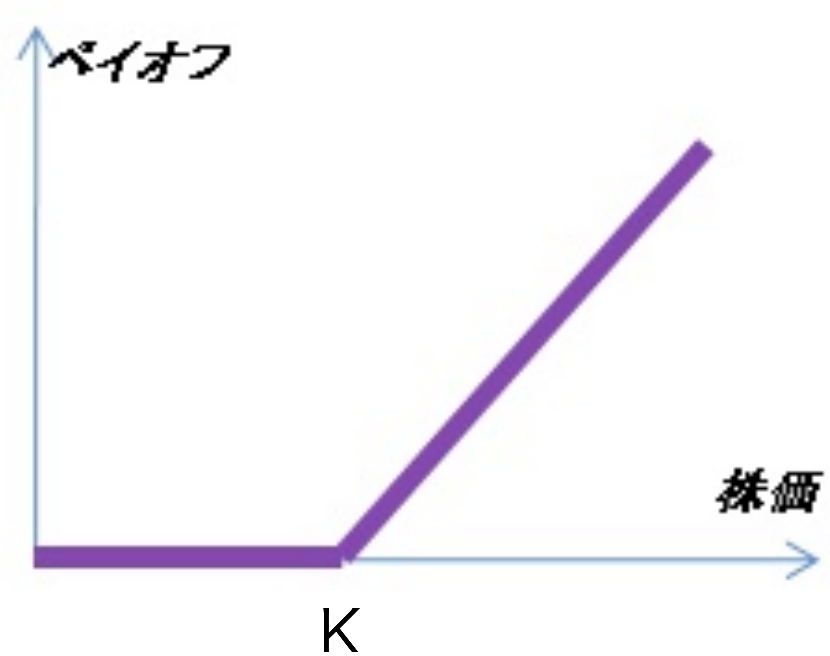
現代のデリバティブはオプション(ルール付き)が主流である。
その理由をヨーロピアンコール・オプションを使って示す

ヨーロピアンコール・オプションとは

将来t=Tで株をK円で買う権利(実際買うかは自由)

利益は

$$C(T) = \left(\begin{array}{ll} S(T) - K & \qquad (K \leq S(T)) \\ 0 & \qquad (S(T) \leq K) \end{array} \right.$$



解析解

BS model

$$dS_t = S_t(\sigma dW_t + \mu dt)$$

$$\frac{dB_t}{dt} = \gamma$$

オプション

$$C(T) = \left(\begin{array}{ll} S(T) - K & (K \leq S(T)) \\ 0 & (S(T) \leq K) \end{array} \right.$$

$$C(t_0) = e^{-\gamma T} E_Q[C_T]$$

解析解

$$\boxed{C(t_0) = S(t_0)\Phi(d_1) - Ke^{-\gamma T}\Phi(d_2)}$$

$$\Phi(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} dy \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}$$

$$d_1 \equiv \frac{log(\frac{S_0}{K}) + (\gamma + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

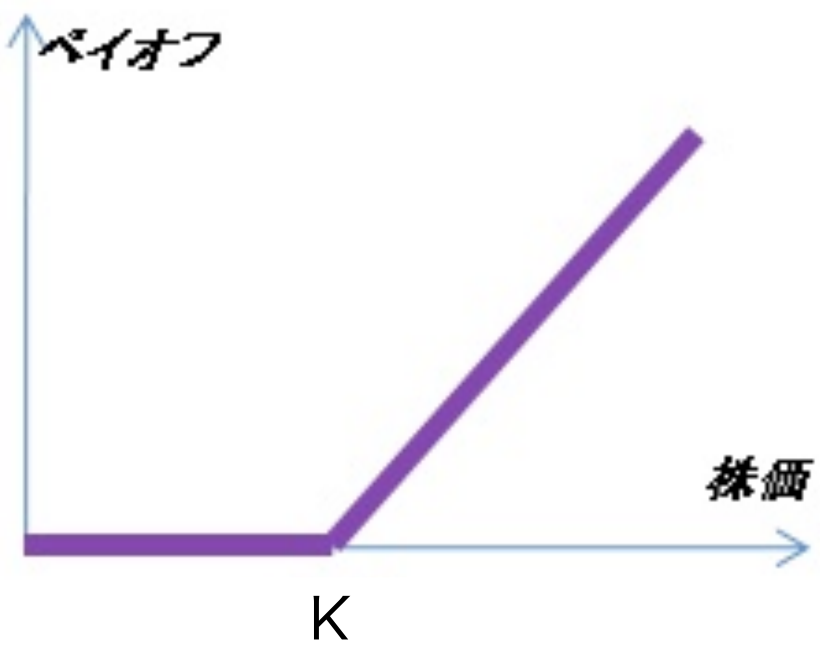
$$d_2 \equiv d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

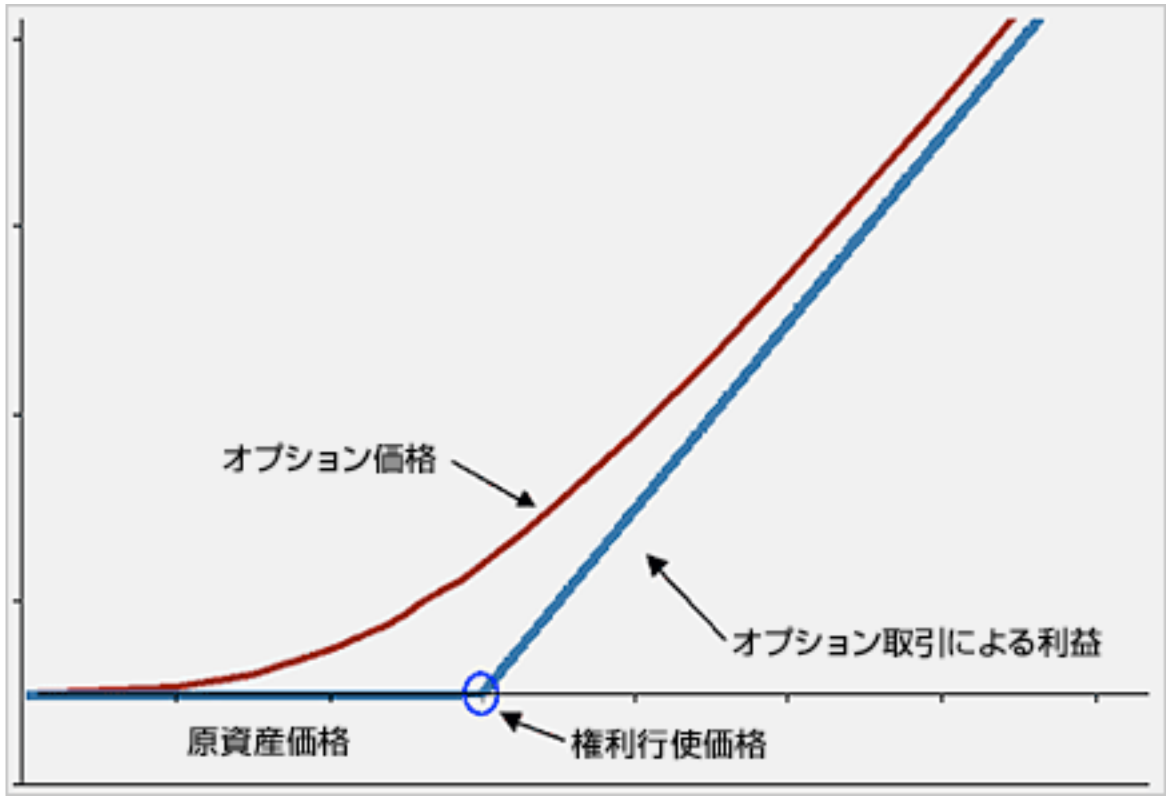
オプションのありがたみ

将来t=Tで株をK円で買う権利(実際買うかは自由)

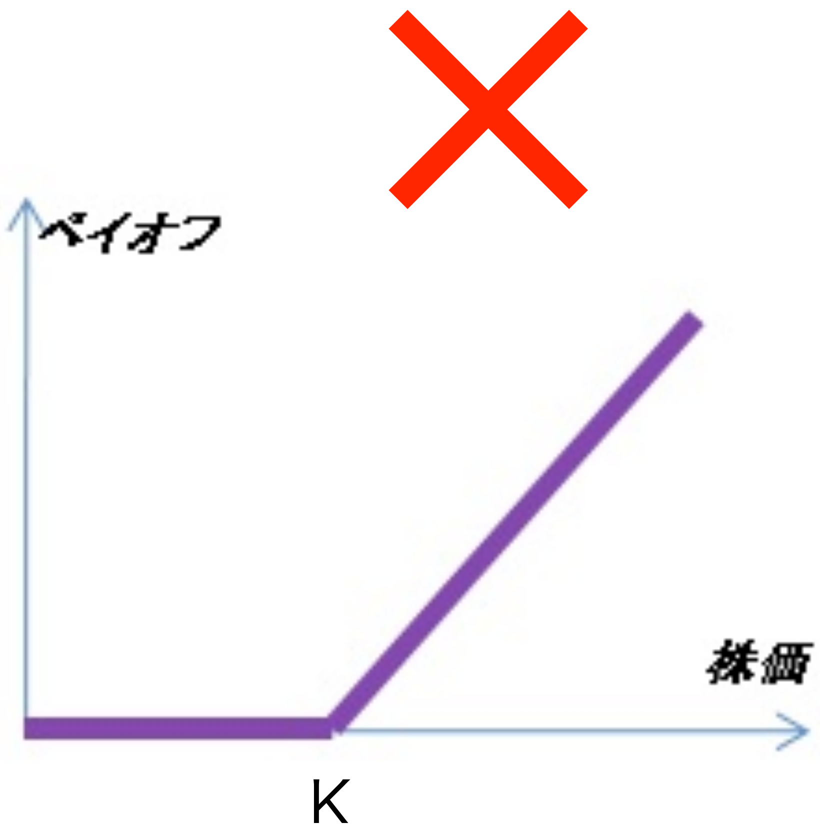
利益は

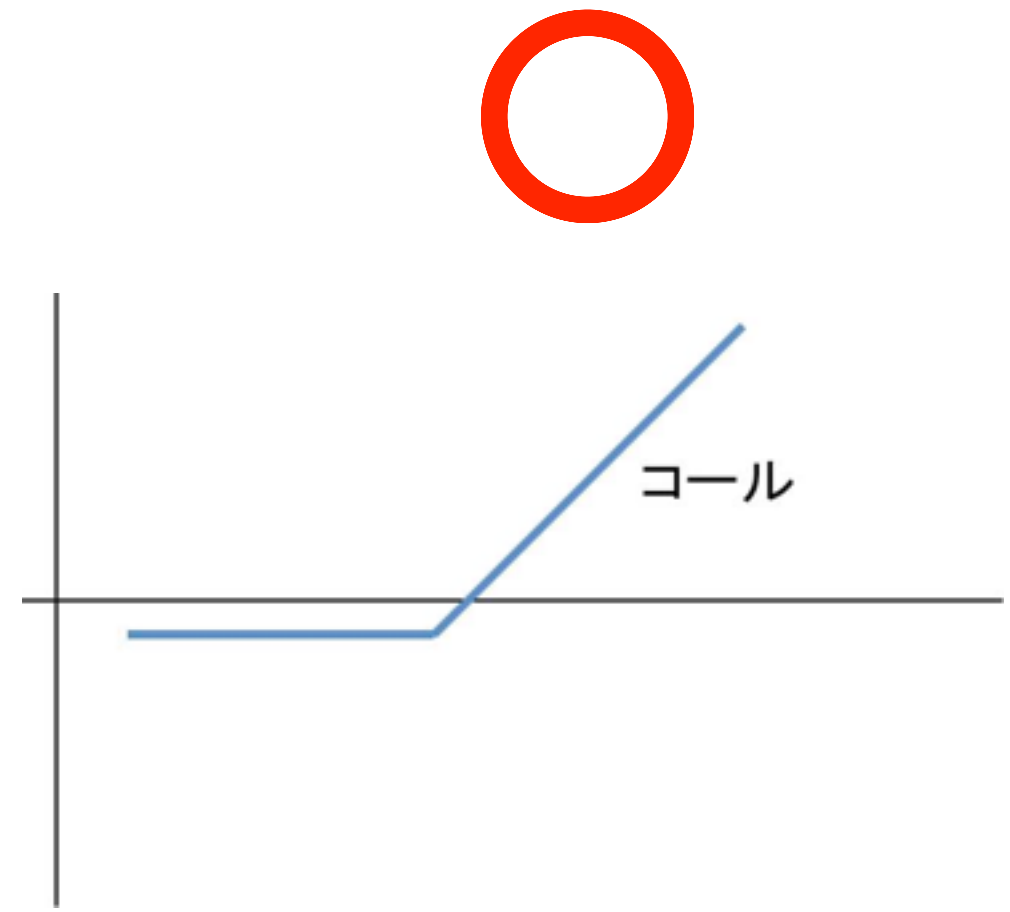
$$C(T) = \left(\begin{array}{ll} S(T) - K & (K \leq S(T)) \\ 0 & (S(T) \leq K) \end{array} \right.$$



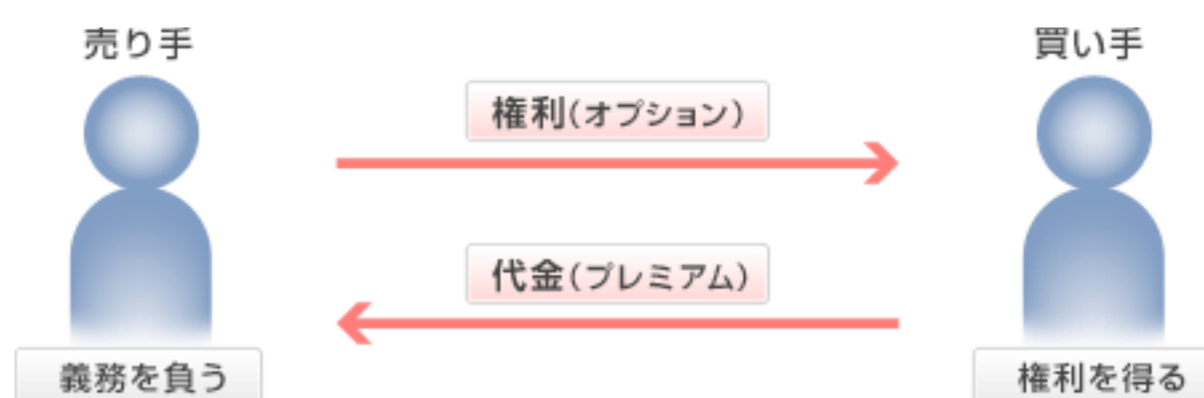


実際は





現実は手数料(premium)がかかる



流れ

- ~~時価計算が必要な対象(デリバティブ)の説明~~
- ~~2項モデル(toy modelで練習)~~
- ~~Black Scholes modelの説明~~
- ~~熱拡散方程式の関係(Feynman-kacの公式)~~
- デルタヘッジ(現実で株式を保有した時リスクヘッジできる小ネタ)

おまけ

デルタヘッジ

デルタを使うと株価変動リスクを回避できる!

デルタの定義

$$C' \equiv \frac{\partial C}{\partial S_0}$$

オプションの時価

原資産の価値

以下のようにPortfolioを組む

$t = 0$ $$P(0) = C(S_0) - \frac{\partial C}{\partial S_0} S_0$$

コール・オプションを持っていた場合に売るべき原資産の数

デルタの数だけ株を売ればリスクをヘッジできる!

$t = 1$ $$P(1) = C(S_1) - \frac{\partial C}{\partial S_0} S_1$$

$$\delta P = P(1) - P(0) = \{C(S_1) - C(S_0)\} - C'(S_0)\Delta S$$

$$C(S_1) = C(S_0) + C'(S_0)\Delta S + \mathcal{O}((\Delta S)^2)$$

$$\delta P = \mathcal{O}((\Delta S)^2)$$

$\mathcal{O}(\Delta S) \Longrightarrow \mathcal{O}((\Delta S)^2)$ とできるメリットがある！

まとめ

- Arbitrageを生まないように時価を決めた。
- リスク中立確率が重要な役割を果たす
- BSモデルの解析解を示した。