

拡張したメルビンモデル 上のDブレイン

筑波大学 2002年6月7日(金曜日)

東京大学本郷 D1 高柳 博充


H.T. and Tadashi Takayanagi

JHEP 05(2002)012 ,hep-th/0204234

1. Motivation

(摂動論的)弦理論:

重力は

Closed string $\left\{ \begin{array}{l} G_{\mu\nu} \text{ Metric} \\ B_{\mu\nu} \text{ B場} \\ \phi \text{ Dilaton} \end{array} \right.$ 

Cf.) Open string A_μ ゲージ場 

で表され、ある background $G_{0\mu\nu}, B_{0\mu\nu}, \phi_0$

の周りの摂動論として記述される

$$G_{\mu\nu} = G_{0\mu\nu} + g_{\mu\nu}, B_{\mu\nu} = B_{0\mu\nu} + b_{\mu\nu}, \phi = \phi_0 + \varphi$$

Background の時空

String (摂動)

曲がった空間上の弦理論はある程度研究されてきた

例) Calabi-Yau 多様体上の弦理論

しかし、曲がった**時**空上の弦理論はあまり調べられていない



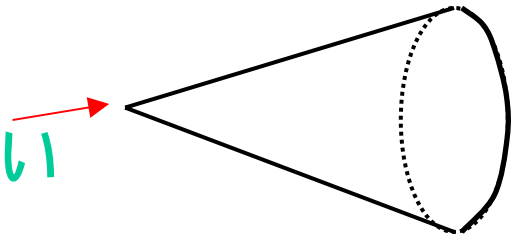
時間方向も含む

これを調べることで**曲がった時**空特有の弦理論的な性質がわかると期待できる

例) ブラックホール, 時空の特異点

Cf.) Orbifold の特異点は弦理論的には解消されている

弦理論的には特異点ではない



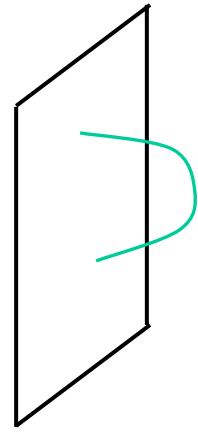
そこで、RussoとTseytlinによって構成されたある**曲がった時**空上の弦理論を調べる



その際に**D-brane**は有用な道具となる

D-brane:

Open stringの端が付く
板状のソリトン



D-braneがなぜ有用か？

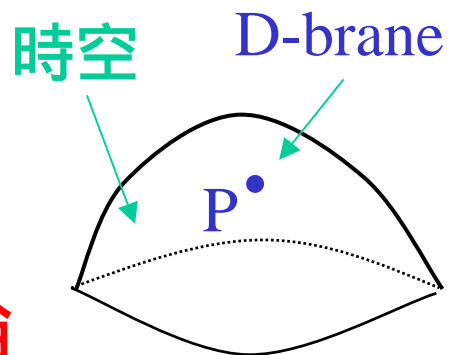
D-brane probeの方法: [Douglas, et al.]

D-brane 上のopen string理論はそれが
ある場所の時空に依存する ← ゲージ理論

点Pでのmetric等

対応 ⇕

D-brane上のゲージ理論



ゲージ理論を調べる事で時空がわかる
(ゲージ理論の方が調べやすい)

⇒ 曲がった時空を調べるために必要な、
動かせる (“bulk”) D-brane を調べる

Contents

1. Motivation
2. Exactly Solvable Model
3. Bulk D-brane
4. 自由場表示の方法
5. 自由場表示でのD-brane
6. Conclusion

2. Exactly Solvable Model

[Russo and Tseytlin]

半径R

時間方向 t と空間3方向 y, ρ, φ が曲がっているモデル(残りの方向は平坦)

$$ds^2 = -dt^2 + dy^2 + d\rho^2 + \frac{\rho^2}{1 + \alpha\beta\rho^2} \times$$

時間方向も曲がっている

$$[d\varphi + (q_+ + \beta)dy - (q_- + \beta)dt][d\varphi + (q_+ - \alpha)dy - (q_- + \alpha)dt],$$

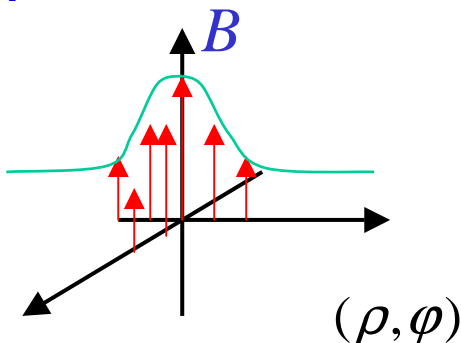
$$B_{y\varphi} = \frac{\alpha + \beta}{2} \frac{\rho^2}{1 + \alpha\beta\rho^2}, \quad B_{t\varphi} = \frac{\alpha - \beta}{2} \frac{\rho^2}{1 + \alpha\beta\rho^2},$$

$$B_{ty} = \left(\frac{\alpha - \beta}{2} q_+ + \frac{\alpha + \beta}{2} q_- + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) \frac{\rho^2}{1 + \alpha\beta\rho^2},$$

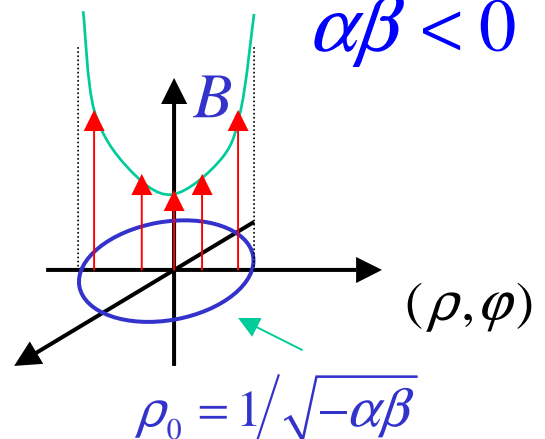
$$e^{2(\phi - \phi_0)} = \frac{1}{1 + \alpha\beta\rho^2}$$

時間方向も B 場

$\alpha\beta > 0$



$\alpha\beta < 0$



注) $\varphi \rightarrow \varphi + \lambda t$ で q_- を自由に変えられるため、 q_- は補助パラメータ

⇒ 実質的なパラメータは (R, α, β, q_+) の4つ

特に $\alpha \neq \beta$ の場合、

- 時間方向も曲がっている
- B 場の時間方向も含む

Cf.)メルビンモデルは $\alpha = \beta$, $q_- = -\beta$, $q_+ = q$

⇒ メルビンモデルを時間方向も曲げて拡張したものとも見なせる

$(\alpha \neq \beta$ の場合の)特徴:

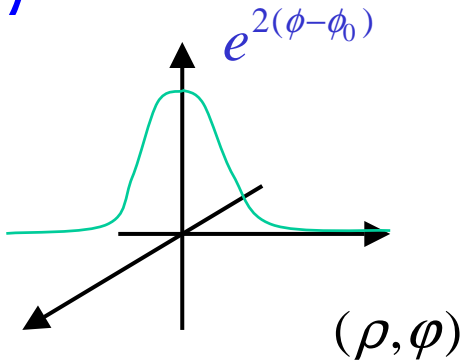
- 1) 名前の通り、厳密に解ける(後述)
- 2) 多くの弦理論モデルを含む。特に Nappi-Witten 型モデルを含む

重力の平面波解 (PP-wave)

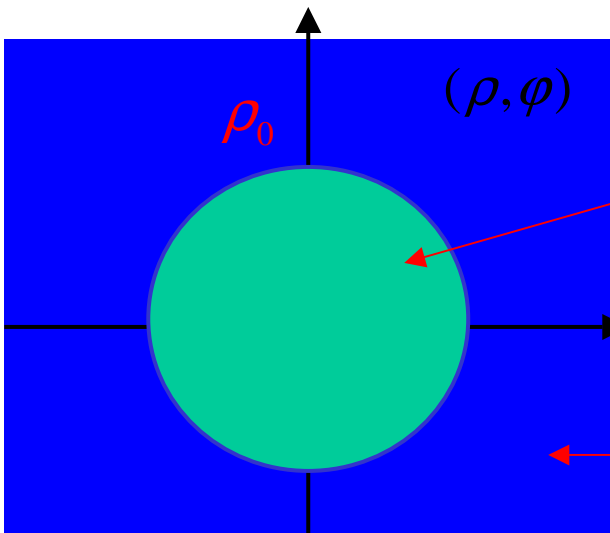
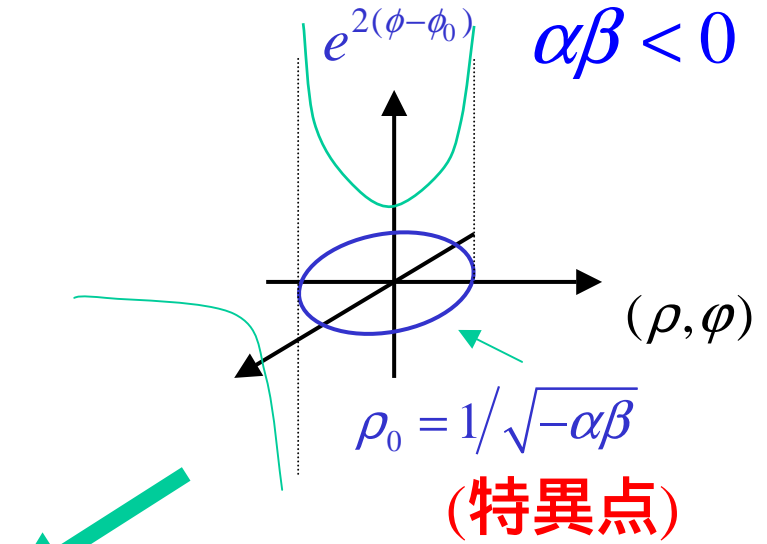
3) $\alpha\beta > 0$ と $\alpha\beta < 0$ で振る舞いが異なる

特に $\alpha\beta < 0$ の場合に、 $\rho_0 = 1/\sqrt{-\alpha\beta}$ に
 特異点を持つ $\because \rho_0$ で dilaton 等が発散

$\alpha\beta > 0$



$\alpha\beta < 0$



$e^{2\phi} > 0$
 (通常の領域)

$e^{2\phi} < 0$
 (考えてはいけない領域?)

3. Bulk D-brane

Dp-braneの低エネルギー有効作用は
Dirac-Born-Infeld (DBI) action:

$$S = \int dx^{p+1} \frac{e^{-\phi}}{4\pi^2 \alpha'^{3/2}} \text{Tr} \sqrt{-\det(G + B + F)}$$

$\int dx^{p+1}$... Dp-braneが広がっている方向

$F_{\mu\nu}$... ゲージ場 A_μ のfield strength

で、これが**最小となる場所**に存在できる

● D0-brane (点)の場合は $S = \int dt \frac{e^{-\phi}}{4\pi^2 \alpha'^{3/2}}$



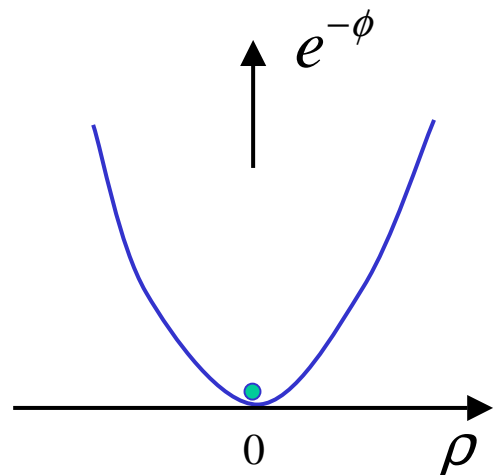
ϕ が定数でないため、自由に動かせない

例) $\alpha\beta > 0$ の場合

$\rho = 0$ にのみ存在できる



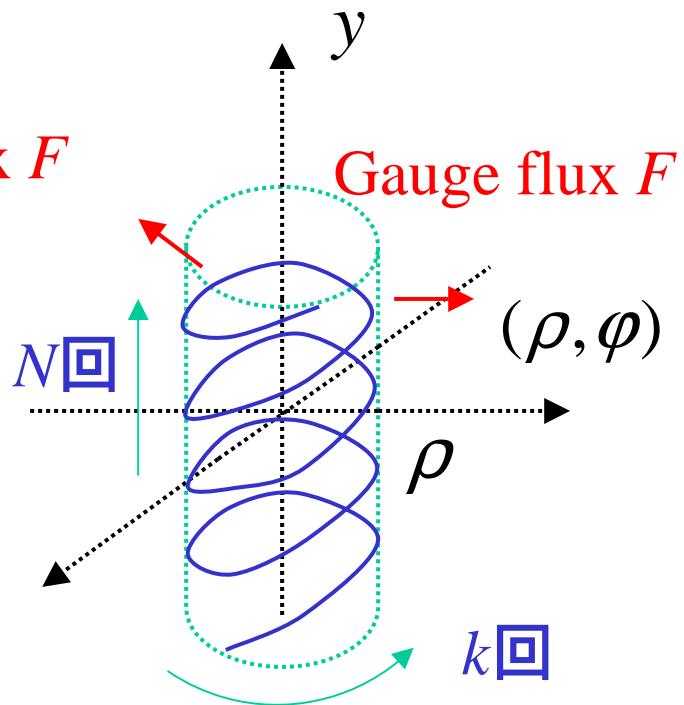
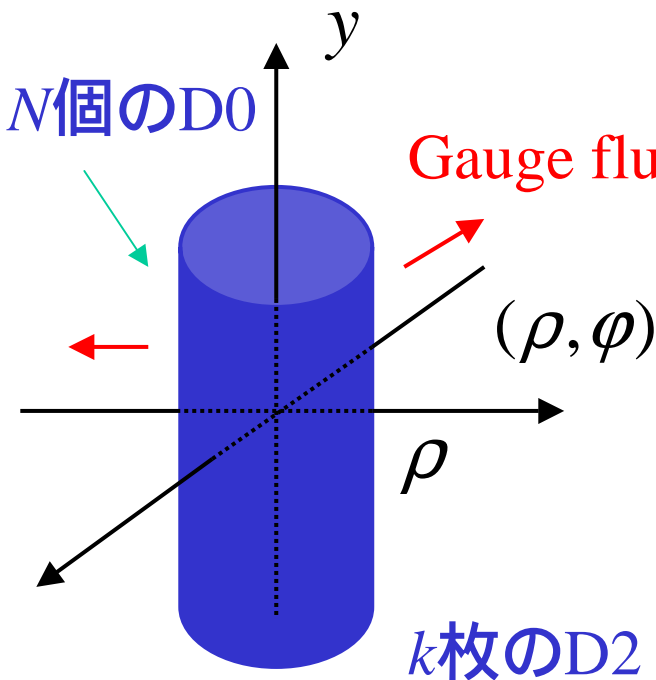
$\rho = 0$ から動かせない!!



Bulk D-braneは次元の高いもの

Dilatonの効果を G, B と**適当な**gauge flux F で打ち消して、作用を定数にする

$\alpha \neq \beta$ の時、次元が低い bulk D-braneとして probeとして使いたいのので



D2-D0 bound state

Spiral D1-brane

の2種類があることを見つけた

k, N は互いに素で、 $(R, \alpha, \beta, q_+, F_{\mu\nu})$ で決まる

時間方向も曲がっている場合の特徴:

Electric gauge flux (電場) $F_{ty}, F_{t\phi}$ を加える
ことで、常にbulk D-braneにできる

Cf.) メルビンの場合は (R, β, q_+) がある条件を
満たした場合のみ、前の2つは動かせる

$(\alpha = \beta)$ $\therefore \frac{k}{N} \sim (\beta - \alpha) F_{ty, t\phi} + \dots$

D-brane as a probe:

これらのD-braneを用いて時空の
弦理論的性質を調べたい



D-brane上のopen stringのスペクトル
を調べる

D1-brane上のopen string Hamiltonianは

$$H_o = -\alpha' E^2 + \alpha' \frac{n^2}{R^2 N^2} + \frac{\rho^2}{\pi^2 \alpha'} \sin^2 \left[\frac{(\alpha - \beta)}{2} \pi \alpha' E + \pi \frac{(\alpha + \beta)}{2R} \alpha' \frac{n}{N} + \frac{\pi m}{N} \right] + \hat{N}$$

$$\left[q_+ + \frac{\beta - \alpha}{2} \right] R \equiv \tilde{q} R = \frac{k}{N}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

だとわかった。

弦の励起モードの
number operator

$\Rightarrow \sin^2 E$ といったあまり見ない形

場の理論的な形 $H_o = \alpha' G^{\mu\nu} p_\mu p_\nu + \hat{N}$ との
対応は?

確かに $N=1, k=0$ として Low energy limit

$$p_t = E \ll \frac{1}{|\alpha - \beta| \alpha'} \quad , \quad p_y = \frac{n}{R} \ll \frac{1}{|\alpha + \beta| \alpha'}$$

をとると、

$$H_0 = -\alpha' \left[1 - \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} \rho^2 \right] E^2 + \alpha' \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{2} \rho^2 E p_y + \alpha' \left[1 + \frac{(\alpha + \beta)^2}{4} \rho^2 \right] p_y^2 + \dots$$



$$G^{tt} = -1 + \frac{(\alpha - \beta)^2}{4} \rho^2, \quad G^{ty} = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \rho^2, \quad G^{yy} = 1 + \frac{(\alpha + \beta)^2}{4} \rho^2$$

⇒ 今回のモデルのmetricと**一致**する。

つまり、低エネルギー極限では時空は弦理論的補正を受けていない

しかし、厳密には $\rho^2 \sin^2 E$ の形なので、高エネルギーでは**時空が弦理論的な補正**を受けている

4. 自由場表示の方法

この弦理論モデルは**厳密に解ける**

⇒ D-braneの解析にこの性質を用いた

(時間+空間1次元の2次元面)

弦理論の作用はworld sheet上の場の理論の作用として現される。今回のモデルでは

$$S_1 = \frac{1}{\pi\alpha'} \int d\sigma^2 \left[-\partial t \bar{\partial} t + \partial y \bar{\partial} y + \partial \rho \bar{\partial} \rho + \frac{\rho^2}{1 + \alpha\beta\rho^2} \times \right. \\ \left. (\partial\phi + (q_+ + \beta)\partial y - (q_- + \beta)\partial t)(\bar{\partial}\phi + (q_+ - \alpha)\bar{\partial}y - (q_- + \alpha)\bar{\partial}t) \right]$$

だが、これは ϕ 方向のT-dualと場の再定義

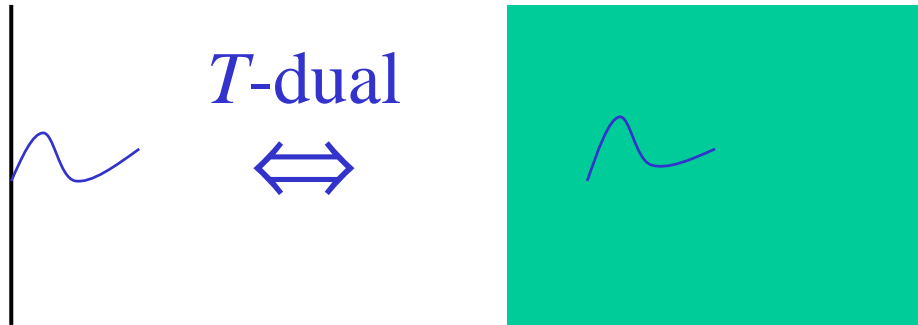
$$\begin{pmatrix} u \equiv y-t \\ v \equiv y+t \\ \phi \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} U \equiv u + \alpha\tilde{\phi} \equiv Y+T \\ V \equiv v + \beta\tilde{\phi} \equiv Y-T \\ \tilde{\phi} \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} U \\ V \\ \phi' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} U \\ V \\ \phi' \equiv \phi + q_+Y - q_-T \end{pmatrix}$$

で自由場のclosed stringの作用となる

$$S_3 = \frac{1}{\pi\alpha'} \int d\sigma^2 [\partial U \bar{\partial} V + \partial X \bar{\partial} \bar{X}], \quad X \equiv \rho e^{i\phi'}, \quad \bar{X} \equiv \rho e^{-i\phi'}$$

T-duality :

同じ系を異なる場の定義で見る双対性



Dirichlet 境界条件

Neumann 境界条件

Super 化 ($N=1$ super space formalism) :

以上の話は bosonic string の場合だが、
super string の場合も

$$X \rightarrow \mathbf{X} \equiv X + i\theta\psi_L + i\bar{\theta}\bar{\psi}_R + \dots$$

$$\bar{X} \rightarrow \bar{\mathbf{X}} \equiv \bar{X} + i\theta\bar{\psi}_L + i\bar{\theta}\psi_R + \dots$$

$$Y \rightarrow \mathbf{Y} \equiv Y + i\theta\eta_L + i\bar{\theta}\eta_R + \dots$$

$$T \rightarrow \mathbf{T} \equiv T + i\theta\zeta_L + i\bar{\theta}\zeta_R + \dots$$

$$\partial \rightarrow D_\vartheta \equiv \partial_\theta + \theta\partial, \quad \bar{\partial} \rightarrow D_{\bar{\theta}} \equiv \partial_{\bar{\theta}} + \bar{\theta}\bar{\partial}$$

と super field に置き換えるだけなので、
bosonic の場合とほとんど同じである

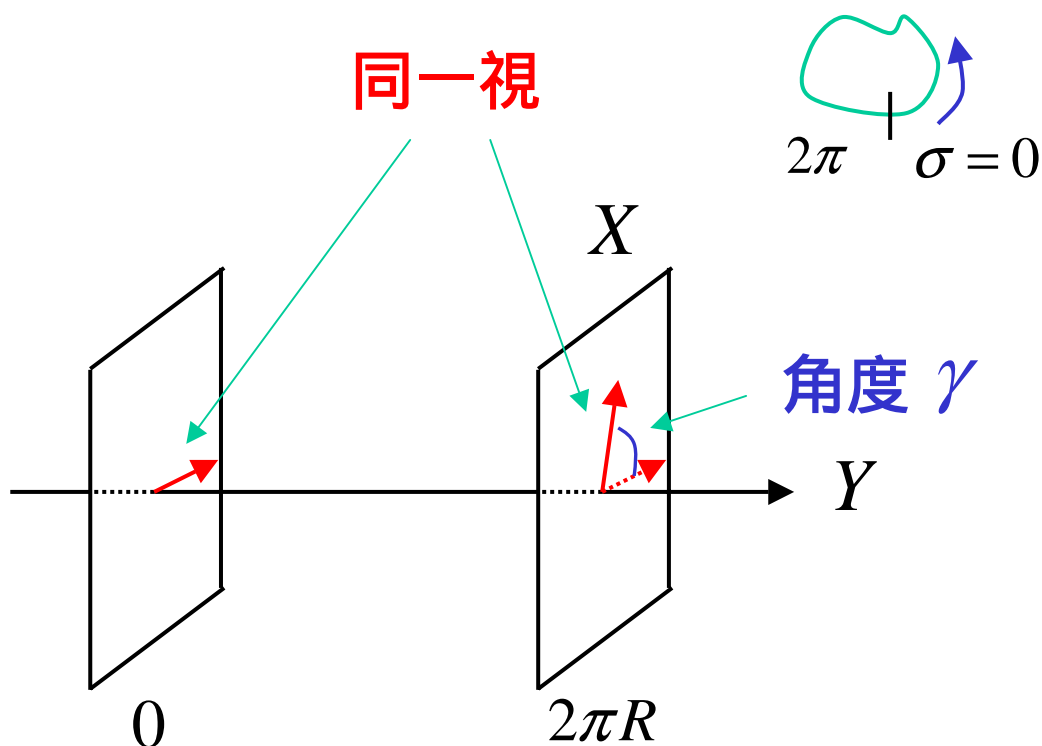
曲がった時空, フラックスの効果は X 方向の twisted boundary condition として現れる

$$X(\tau, \sigma + 2\pi) = e^{2\pi i \gamma} X(\tau, \sigma), \quad \psi_{L,R}(\tau, \sigma + 2\pi) = e^{2\pi i \gamma} \psi_{L,R}(\tau, \sigma)$$

$$\gamma = \left(q_+ + \frac{\beta - \alpha}{2} \right) wR + \frac{\alpha + \beta}{2} \alpha' \left[\frac{n}{R} - \left(q_+ + \frac{\beta - \alpha}{2} \right) \hat{j} \right] + \frac{\beta - \alpha}{2} \alpha' \left[E + \left(q_- + \frac{\alpha + \beta}{2} \right) \hat{j} \right]$$

- ただし
- $w \dots$ winding number
 - $\frac{n}{R} \dots$ Kaluza-Klein momentum
 - $\hat{j} \dots$ X 方向の角運動量

である



5. 自由場表示でのD-brane

自由場表示 (T, Y, X) でD-braneを調べた
境界条件として、

Neumann 境界条件 (N)

Dirichlet 境界条件 (D)

がある

次元が低いD-braneが知りたいので、

D0-brane $(T, Y, X) = (N, D, D)$

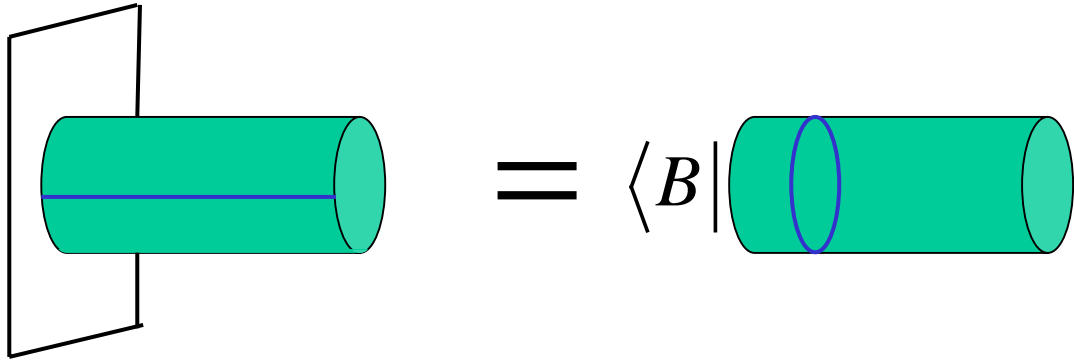
\Updownarrow Y 方向のT-dual

D1-brane $(T, Y, X) = (N, N, D)$

の2種類を調べた

Boundary state formalism:

Open stringの1-loop amplitudeを考える



Open stringの端

Closed stringの始(終)状態

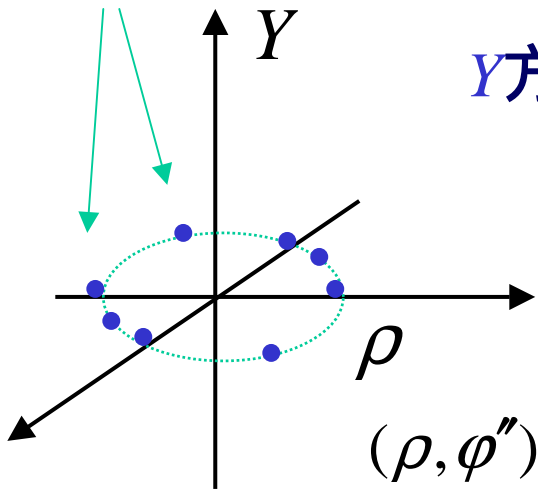
D-braneはclosed stringの始(終)状態とも見なせる

Boundary state $|B\rangle$ と呼ばれている

自由場表示でboundary state formalismを用いることで、動かせるD-braneを調べた

自由場表示のbulk D-brane:

N個のD0

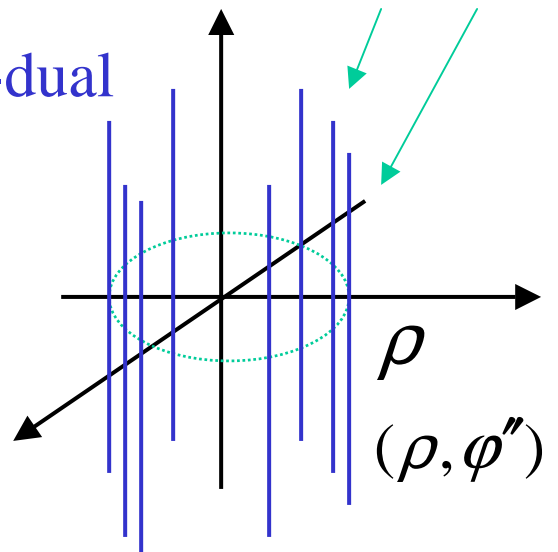


Bulk D0-brane

Y 方向にT-dual



N個のD1



Bulk D1-brane

ただし、これらのD-braneが存在するためには、 (R, α, β, q_+) がある条件を満たす必要がある。



元の座標では電場を加えることで常にbulk D-braneが作れた。この電場に相当するものは何か？

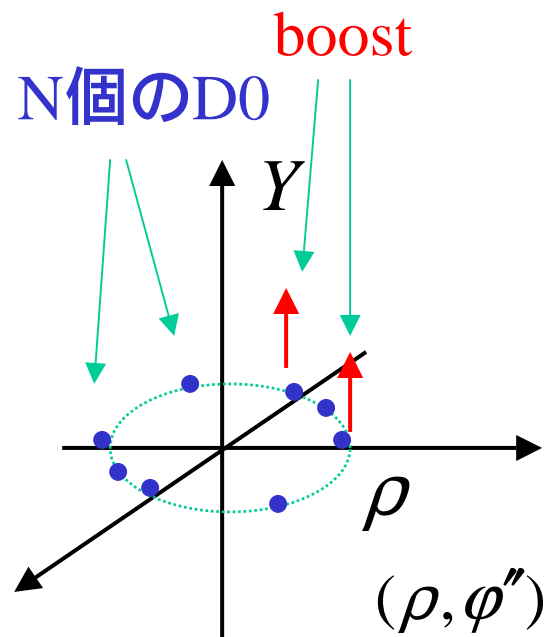
Boosted D0-brane:

時間方向も曲がっている場合 ($\alpha \neq \beta$) は

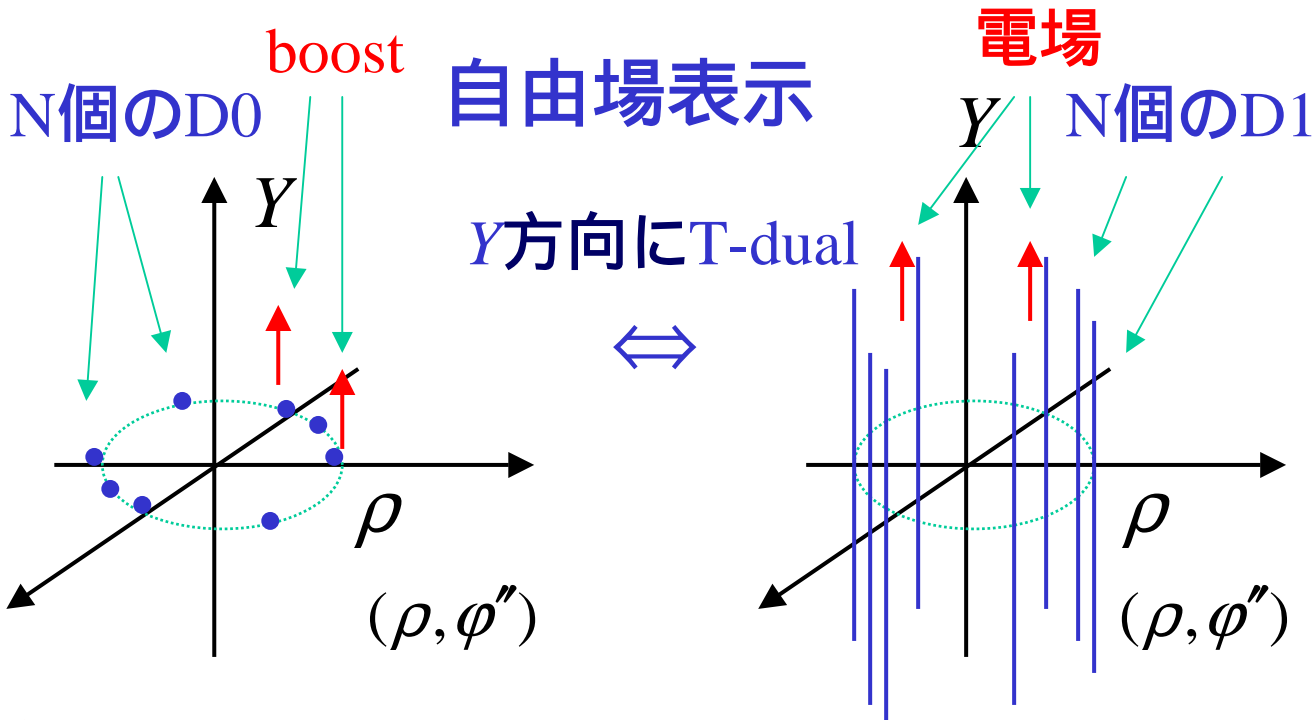
Y方向に**適当な速度** v でLorentz boostを
取る事で常にbulk D0-brane**が存在する**



電場に相当するものは
Lorentz boost !!



元の座標のD-braneとの対応:



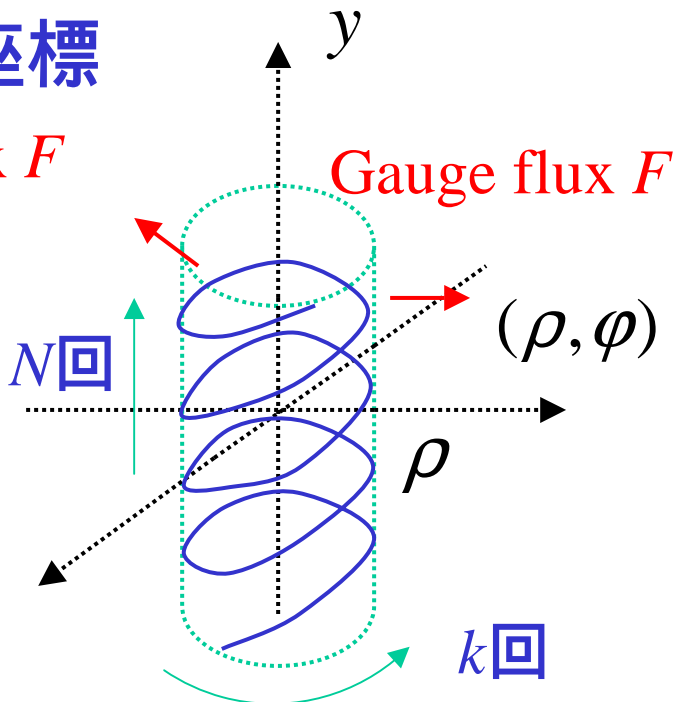
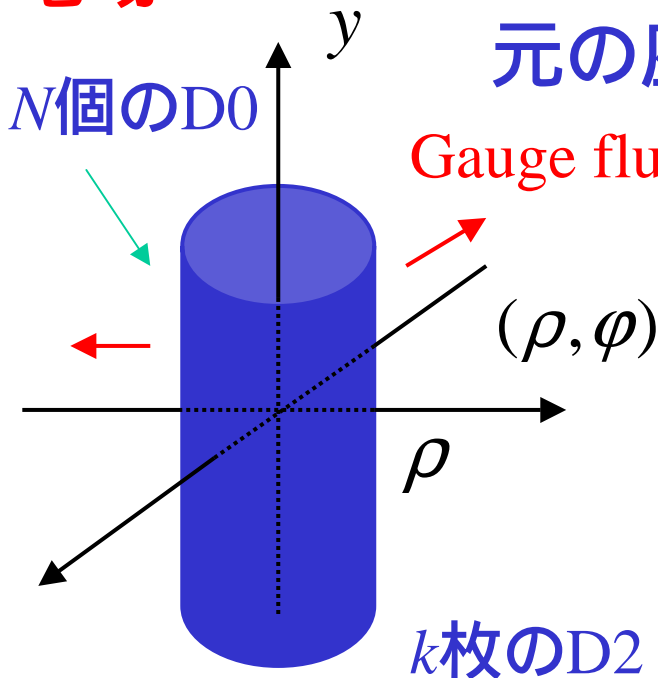
boost
電場



対応



対応



D2-D0 bound state

Spiral D1-brane

6. Conclusion

拡張メルビンモデルの特徴

- 時間方向も曲がっている
- 時空に特異点がある場合がある
- Nappi-Witten 等多くのモデルを含む
- 時空の座標変換で厳密に解ける

動かせる (bulk) D-braneとして、

適当な電場が入った

← Probeとして使う

D2-D0 bound state (円柱状)

Spiral D1-brane (円柱に巻きついたもの)

の2種類があることがわかった