弦の場の理論

石橋延幸

筑波大学数理物質系

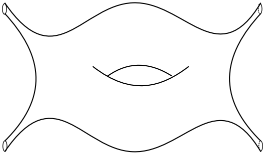
２０１３年５月１８日
研究会「場の理論の進展」

Superstring theory

- 重力を含んだ統一理論（Yoneya, Sherk-Schwarz)
- AdS/CFT 対応　強結合ゲージ理論、原子核、物性、.....

多くの場合、第一量子化の定式化を用いて議論する

$$A = \sum_{\text{worldsheet}}$$



String field theory (SFT)

弦の理論を第二量子化し、弦の場の理論を作る

- string 理論の非摂動的な定義を与える
- string 理論の背後にある対称性・原理を知りたい

万人が納得する「弦の場の理論」はまだできていない

- 全ての不変性（ローレンツ不変性・ゲージ不変性）が明らかで
- S 行列のユニタリー性が明らかで
- 作用が簡単な形で
- 幾何学的描像が見易く
- 運動方程式の解が容易に求まって......

String field theory (SFT)

正しい摂動振幅を出す弦の場の理論はあるか？
どこまでできているのか？

- 万人が納得しなくても目的によっては有効

  例　格子ゲージ理論　メソンの質量を $\frac{1}{100}$ の精度で計算

- 弦の場の理論ではない定式化が正しいことを示そうとすると必要

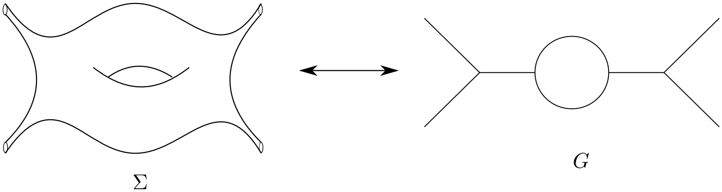
  例　IIB matrix model $\longrightarrow$ light-cone gauge SFT
  (Fukuma-Kawai-Kitazawa-Tsuchiya)

Outline

1. SFT for bosonic strings
2. SFT for superstrings
3. Conclusions and discussions

第一量子化

$$A_\Sigma(p) = \int \prod_i dm_i F(m,p) \qquad\qquad I_G(p) = \int \prod_i d\alpha_i f(\alpha,p)$$



- m_i:モジュライパラメタ（世界面上の計量の自由度の一部）
- （m_i の取り方を決めれば）$F(m,p)$ を計算することができる
- bosonic string 理論にはタキオンが含まれているので積分は発散してしまう

SFT for bosonic strings

第一量子化から出てくる積分の形 $\int \prod_i dm_i F(m,p)$ を再現することができる場の理論

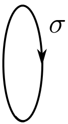
SFT for bosonic strings

- Light-cone gauge SFT
- “Witten 型 ”
  - Witten 型 open SFT
  - Witten 型 closed SFT
- light-cone 型
  - $(\alpha = p^+)$HIKKO
  - Covariantized light-cone SFT

Light-cone gauge SFT (closed)

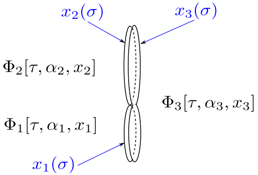
Kaku-Kikkawa 1974

string field $\Phi[\tau, \alpha, X^i(\sigma)]$



$$
\begin{aligned}
\tau &= x^+ : \text{時間} \\
\alpha &= 2p^+ : \text{弦の長さ} \\
&\quad (0 \leq \sigma < 2\pi|\alpha|)
\end{aligned}
$$

action $$S = \int [\frac{1}{2}\Phi(i\partial_\tau - H)\Phi + \frac{g}{6}\Phi \cdot (\Phi * \Phi)]$$



Light-cone gauge SFT

- ユニタリー性は明白
- ローレンツ不変性は明白ではない
  ローレンツ不変性の証明（Kugo, Sin, Onogi, Saitoh-Tanii, Kikkawa-Sawada）

$$\mathcal{J}^{i-} = \frac{1}{2}\int \Phi M^{i-}\Phi - \frac{g}{6}\int \Phi \cdot X^{i}\left(\Phi * \Phi\right)$$

$$\left[\mathcal{J}^{i-}, \mathcal{J}^{j-}\right] = 0$$

- 摂動展開が第一量子化の結果と一致する

$$\int \prod_{i} dm_i F(m,p)$$

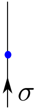
  - 積分範囲がリーマン面のモジュライ空間と一致（Giddings-Wolpert）
  - 被積分関数 $F(m,p)$ が一致（D'Hoker-Giddings）

Witten 型 open SFT

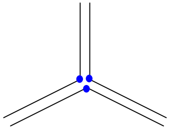
..., Witten 1986

string field $\Psi[X^\mu(\sigma), b, c]$

$0 \leq \sigma \leq \pi$



action $$S = \frac{1}{g^2}\int[\frac{1}{2}\Psi Q_{\mathrm{B}}\Psi + \frac{1}{3}\Psi\cdot(\Psi * \Psi)]$$

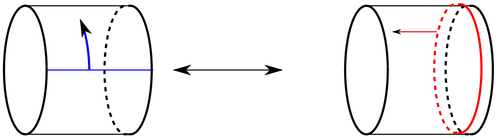


Witten 型 open SFT

- ローレンツ不変・ゲージ不変

$$\delta\Psi = Q_{\mathrm{B}}\Lambda + \Psi * \Lambda$$

- open string の自由度だけしか含まない



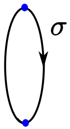
- 第一量子化の結果を再現 (Zwiebach)
- 九後さんたちはこの作用を得ていた
  1983 Kato-Ogawa ＋「拡がりを持つ素粒子像」後藤鉄男
  （Kato-Kugo-Ogawa-Uehara）

Witten 型 closed SFT

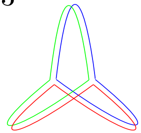
Saadi-Zwiebach,Kugo-Kunitomo-Suehiro,Kaku, Zwiebach

string field $\Psi[X^\mu(\sigma), b, c, \bar{b}, \bar{c}]$

$0 \leq \sigma < 2\pi$



action $S = \frac{1}{g^2} \int [\frac{1}{2} \Psi Q_{\mathrm{B}} \Psi + \frac{1}{3} \Psi \cdot (\Psi * \Psi) + \cdots]$



- 無限個の相互作用項を取り入れることで、第一量子化の結果を再現（Zwiebach 1993)

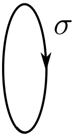
HIKKO (closed)

Hata-Itoh-Kugo-Kunitomo-Ogawa 1986

string field $\Phi[\alpha, X^\mu(\sigma)]$

α ： 弦の長さ

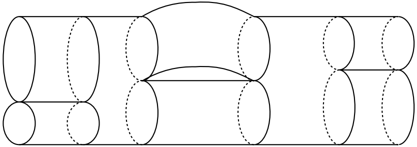
$(0 \le \sigma < 2\pi|\alpha|)$



action $$S = \int [\frac{1}{2}\Phi Q_{\mathrm{B}}\Phi + \frac{g}{6}\Phi \cdot (\Phi * \Phi)]$$

$(\alpha = p^+)$ HIKKO

- ローレンツ不変・ゲージ不変
- このままでは第一量子化の結果を再現しない
  - α
  - モジュライ空間を１回以上覆う



- $\alpha = p^+$ とおくと、正しい振幅を出す (Kugo-Zwiebach 1992)
- open string 場と結合させることができる（HIKKO, Asakawa-Kugo-Takahashi)

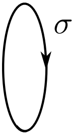
Covariantized light-cone SFT (closed)

Siegel, Neveu-West, Uehara, Kugo

string field $\Phi[\tau, \alpha, \theta, X^{\mu}(\sigma), C(\sigma), \bar{C}(\sigma)]$

α ： 弦の長さ

$(0 \leq \sigma < 2\pi|\alpha|)$



action $$S = \int [\frac{1}{2}\Phi Q_{\mathrm{B}}\Phi + \frac{g}{6}\Phi \cdot (\Phi * \Phi)]$$

- light-cone gauge に変数 $X^{\pm}, C, \bar{C}, \theta$ を加えて共変化
- ローレンツ不変・ゲージ不変
- 正しい振幅を出す (Kugo 1989)

SFT for bosonic strings

SFT for bosonic strings

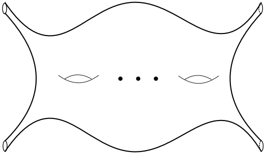
- Light-cone gauge SFT
- “Witten 型 ”
  - Witten 型 open SFT
  - Witten 型 closed SFT
- light-cone 型
  - $(\alpha = p^+)$HIKKO
  - Covariantized light-cone SFT

これらを超対称化することにより superstring の場の理論を作ろう

§2 SFT for superstrings

第一量子化（NSR 形式）

$$A_\Sigma(p) = \int \prod_i dm_i \prod_a d\eta^a F(m, \eta, p)$$



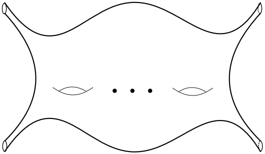
Σ

- $\{m_i, \eta^a\}$:supermoduli 空間の座標
- m_i:モジュライパラメタ（世界面上の計量の自由度の一部）
- η^a:odd モジュライパラメタ（世界面上の gravitino の自由度の一部）

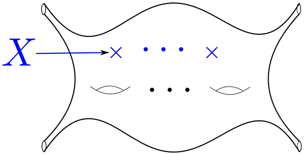
第一量子化

第一量子化でさらに計算しようとすると様々な問題

$$A_\Sigma(p) = \int \prod_i dm_i \prod_a d\eta^a F(m,\eta,p) \longrightarrow A_\Sigma(p) = \int \prod_i dm_i \tilde{F}(m,p)$$



Σ



X:picture changing operator

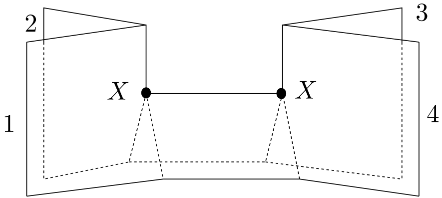
- spurious singularities：$\tilde{F}(m,p)$ が m_i の関数として特異点を持つ
- supermoduli 空間は"holomorphically non-split"（Donagi-Witten 2013）
- choice of the integration cycle $\Gamma \subset \mathcal{M}_L \times \mathcal{M}_R$（...,Witten 2012）

SFT for superstrings

bosonic string の場の理論を superstring に拡張しようとするとやはり問題

例　Witten 型 open（Witten 1986）

$$S = \frac{1}{g^2} \int \left[\frac{1}{2} \Psi Q_{\mathrm{B}} \Psi + \frac{1}{3} \Psi \cdot X(i) \, (\Psi * \Psi) \right] + \text{fermions}$$



２つの picture changing operator X が近づくと発散（コンタクト項の問題 ~spurious singularity)

Remarks

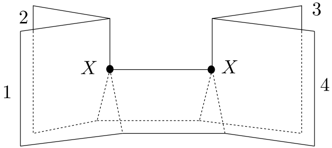
第一量子化と SFT とではかなり事情が異なる

- SFT における supermoduli space の parametrization は holomorphic ではない
  - light-cone 型: Mandelstam mapping $\rho(z)$ は $\mathrm{Re}\oint\partial\rho(z)=0$ を満たす
  - Witten 型:quadratic differential は minimal area condition を満たす
- SFT では integration cycle Γ は決まっている

SFT for superstrings

superstring の SFT を作るには

- コンタクト項の問題を解決し
- 計算結果が $\int \prod_i dm \prod_a d\eta^a F(m, \eta, p)$ と一致するかを確かめる



コンタクト項の問題の対処法

- Witten 型
  - modified cubic
  - Berkovits
- light-cone 型
  - 次元正則化

modified cubic

Preitschopf-Thorn-Yost,
Arefeva-Medvedev-Zubarev 1990

$$S = \frac{1}{g^2} \int Z \left[\frac{1}{2} A Q_{\mathrm{B}} A + \frac{1}{3} A \cdot (A * A) \right] + \text{fermions}$$

- ∼Witten の作用を $A = Y(i)\,\Psi$ $(YX = XY = 1)$ で書き変えたもの

$$S = \frac{1}{g^2} \int \left[\frac{1}{2} \Psi Q_{\mathrm{B}} \Psi + \frac{1}{3} \Psi \cdot X(i)\,(\Psi * \Psi) \right] + \text{fermions}$$

- $Zc(\pm i) = Z\gamma^2(\pm i) = 0$　新たなゲージ対称性
- これらのゲージ対称性を固定して摂動の all order で BRS 不変に量子化できる（Kohriki-Kishimoto-Kugo-Kunitomo-Murata 2011）

Berkovits

Berkovits 1995

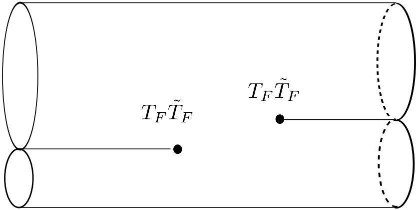
$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2g^2}\left[\int \left(e^{-\Phi}Q_{\mathrm{B}}e^{\Phi}\right)\left(e^{-\Phi}\eta_0 e^{\Phi}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \int_0^1 dt \int \left(e^{-\Phi}\partial_t e^{\Phi}\right)\left\{e^{-\Phi}Q_{\mathrm{B}}e^{\Phi}, e^{-\Phi}\eta_0 e^{\Phi}\right\}\right] + \text{fermions}
\end{aligned}
$$

- 古典的には $A \sim e^{-\Phi}Q_{\mathrm{B}}e^{\Phi}$
- BRS 不変に tree amplitude を計算できる（Kroyter-Okawa-Schnabl-Torii-Zwiebach 2012）
- Witten の理論との関係（Iimori-Noumi-Okawa-Torii）

次元正則化

Light-cone gauge SFT for superstrings にもコンタクト項の問題がある

$$S = \int d\tau \left[\frac{1}{2} \Phi \left(i\partial_\tau - H \right) \Phi + \frac{g}{6} \Phi \cdot T_F \tilde{T}_F \left(\Phi * \Phi \right) \right] + \text{fermions}$$



- light-cone gauge はゲージ対称性を完全に固定した理論なので $d \neq 10$ でも考えることができる
- 時空の次元を 10 からずらすことによって、tree amplitude のコンタクト項の発散を回避し、正しい摂動振幅を出すことができる（Baba-N. I.-Murakami 2009）

SFT for superstrings

コンタクト項の問題を解決可能な SFT

SFT for superstrings

- Witten 型
  - modified cubic
  - Berkovits
  - heterotic（Okawa-Zwiebach,Berkovits-Okawa-Zwiebach)
  - Type II（Jurco-Muenster,Kugo-Kunitomo-Zwiebach)
- light-cone 型
  - light-cone gauge SFT

§3 Conclusions and discussions

- bosonic string の場合、第一量子化の散乱振幅の表式を出す SFT は数種類ある
- superstring の場合、BRS 不変に振幅を計算できる SFT が数種類ある

- superstring SFT から計算される散乱振幅は第一量子化の結果と一致するか？

  超空間形式に書き直すことが必要
  light-cone 型：Berkovits, Aoki-D'Hoker-Phong

- SFT を用いて、string 理論の非摂動的な性質を調べる

  Witten 型 open：摂動論的には求めることができない様々な古典解が求まっている

エルサレム聖墳墓教会にて

九後さんと Zwiebach 氏